

LÖSUNG: DAS MODERNE UNIVERSUM

Max Camenzind

9. März 2021

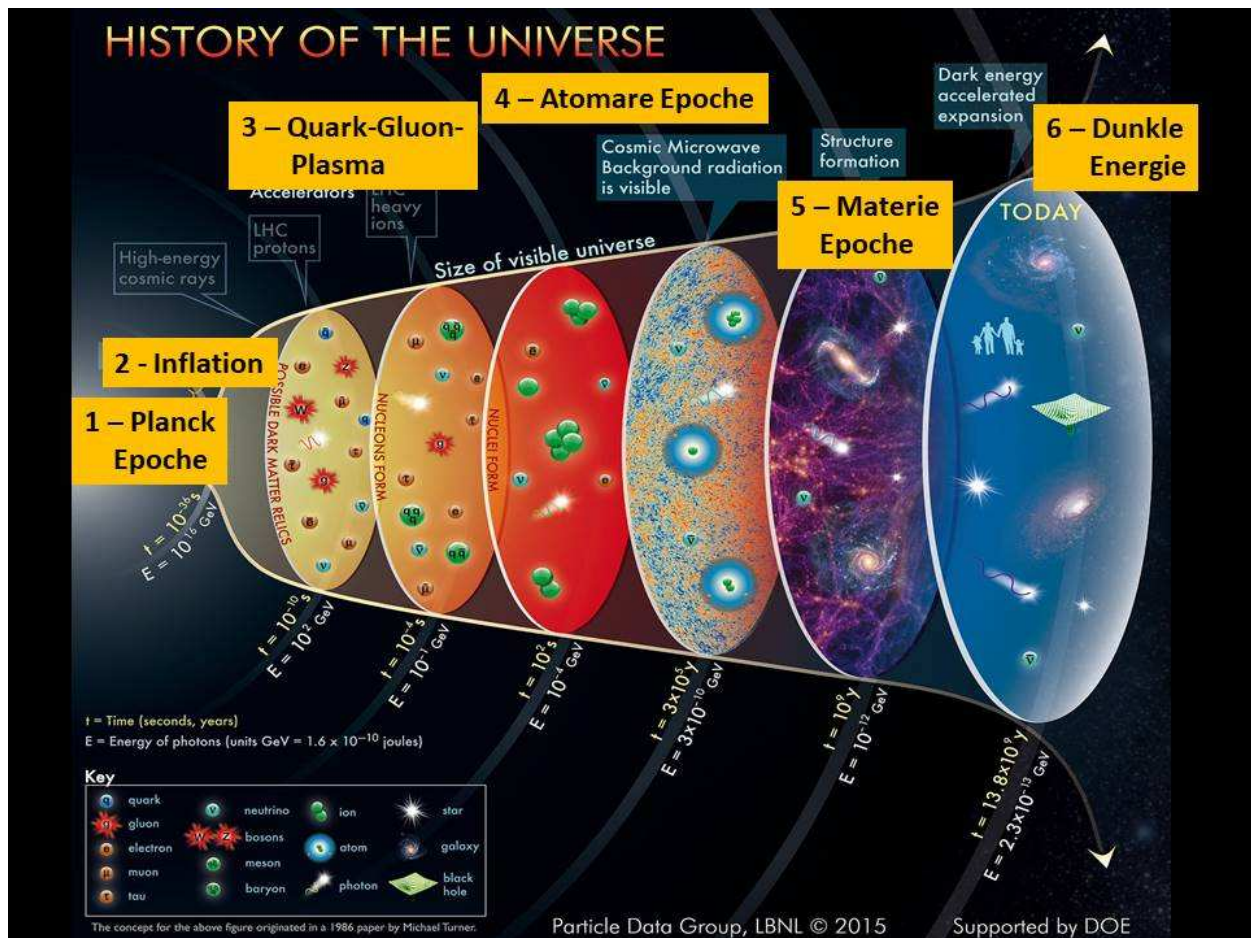


Abbildung 1: Die Geschichte des modernen Universums beginnt in der Planck-Epoche, die Lemaître noch als Ur-Atom bezeichnet hatte. Genau wie damals wissen wir auch heute nicht, was dahinter steckt. Die Physik danach ist dann relativ gut bekannt. Damit unterscheiden wir heute 6 wesentliche Epochen in der Geschichte des Universums: 1 - Planck Epoche; 2 - Inflation; 3 - Quark-Gluon-Plasma; 4 - Atomare oder Plasma Epoche; 5 - Materie oder Struktur Epoche; 6 - Dunkle Energie Epoche. [Grafik: Particle Data Group LBNL, nach einer Vorlage von Michael Turner]

1. Das heutige Moderne Universum ist ein Spezialfall des Lemaître-Universums. Um welchen Spezialfall handelt es sich?
 ↳ Spezialfall $\Omega_k = 0$ mit $\Omega_m + \Omega_\Lambda = 1$. Das bedeutet aber nicht, dass die Krümmung genau Null ist – sie ist nur sehr klein, d.h. der Krümmungsradius ist riesig.

2. Wie lautet die Hubble-Funktion?
 ↳ Die Hubble-Funktion lautet

$$H^2(a) = H_0^2 \left(\frac{\Omega_m}{a^3} + \Omega_\Lambda \right). \quad (1)$$

3. Wie lautet die Lösung für den Expansionsfaktor $a(t)$? Wie könnte man dies beweisen?
 ↳ Die Lösung lautet

$$a(t) = \left[\sqrt{\frac{\Omega_m}{1 - \Omega_m}} \sinh \left(\frac{3\sqrt{1 - \Omega_m} H_0 t}{2} \right) \right]^{2/3}. \quad (2)$$

Beweis: Nach t ableiten und in Hubble-Funktion $H(t) = \dot{a}/a$ einsetzen.

4. Wie groß ist die Hubble-Zeit $t_H = 1/H_0$ für $H_0 = 67,4$ km/s/Mpc? Wie groß ist der Hubble-Radius $R_H = c/H_0$? Was bedeutet der Hubble-Radius?
 ↳ Hubble-Zeit $t_H = 1/H_0 = 14,5$ Mrd. Jahre. Hubble-Radius $R_H = c/H_0 = 4448$ Mpc.

Die Hubble-Zeit ist ein Maß für das Alter des Universums – das genau Alter hängt auch von der Materieverteilung ab. Der Hubble-Radius ist der Maßstab des heutigen Universums. Auch der Radius R_0 des heutigen Universums wird in Einheiten des Hubble-Radius gemessen, wobei gilt $R_0 \gg R_H$.

5. Wie verhält sich die Expansion für kleine Zeiten $t \ll t_H$? Wie für große Zeiten $t \gg t_H$?
 ↳ Für $t \ll t_H$ gilt $a(t) \propto t^{2/3}$, für $t \gg t_H$ expandiert das Universum exponentiell.

6. Bei welcher Rotverschiebung z_1 geht die Abbremsung in eine Beschleunigung über?
 ↳ Die zweite Friedmann-Gleichung bestimmt die Beschleunigung \ddot{a} :

$$\ddot{a}(t) = -H_0^2 \left[\frac{1}{2} \Omega_m (1 + z_1)^3 - \Omega_\Lambda \right] = 0. \quad (3)$$

Daraus folgt die Rotverschiebung am Wendepunkt der Expansion, $\ddot{a}(z_1) = 0$,

$$z_1 = \left(\frac{2\Omega_\Lambda}{\Omega_m} \right)^{1/3} - 1 = 0,7. \quad (4)$$

7. Wie lautet die Umkehrung $t = t(z)$? Wie berechnet sich das Alter eines LambdaCDM-Universums?
 ↳

$$t(z) = \frac{2}{3H_0\sqrt{1 - \Omega_m}} \operatorname{arsinh} \left[\frac{1 - \Omega_m}{\Omega_m(1 + z)^3} \right]. \quad (5)$$

Verwende die Identität $\operatorname{arsinh}(x) = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$.

=====

8. Welche Epochen lassen sich im modernen Universum seit dem Urknall unterscheiden?
 ↳ s. Abb. 1.
9. Welchen Zeitskalen entsprechen diese Epochen?
 ↳ s. Tab. 1.
10. Welchen Temperaturen entsprechen diese Epochen?
 ↳ s. Tab. 1.
11. Welchen Energien entsprechen diese Epochen?
 ↳ s. Tab. 1.
12. Was versteht man unter primordialer Nukleosynthese? Welche Elemente werden fusioniert?
 ↳ In der Zeit von etwa 3 Minuten nach dem Urknall bilden sich aus Protonen und Neutronen Deuterium, Helium und etwas Lithium, aus dem wir heute Batterien bauen. Es werden aber kein Kohlenstoff, kein Sauerstoff etc. fusioniert, da das Universum durch die Expansion zu schnell auskühlt.
13. Wann bilden sich Galaxien im Universum aus?
 ↳ Die ersten Sterne bilden sich nach etwa 300 Mio. Jahren nach dem Urknall, die ersten Galaxien nach etwa 500 Mio. Jahren.

Tabelle 1: Physikalische Parameter in den Epochen

Variable	Planck	Inflation	QG-Plasma	Atomare	Materie	DE
Zeit	10^{-43} s	bis 10^{-27} s	bis $10 \mu\text{s}$	bis 10.000 a	bis 7 Mrd. a	Zukunft
Temperatur	undef	10^{29} K	bis 10^{12} K	bis 100 K	bis 5 K	mK
Energie	10^{19} GeV	10^{16} GeV	bis 200 MeV	bis eV	Reionisation	↳ 0

Die Energie, welche die Inflation antreibt, wird am Ende der Inflation durch bisher unbekannte Prozesse in das Quark-Gluon-Lepton-Plasma umgesetzt, bei einer Temperatur von etwa 10^{16} GeV. Das entspricht etwa einem Promille der Planck-Energie. Damit ist die Materie entstanden, aus der wir letztendlich bestehen – Quarks, Elektronen, Photonen und Neutrinos. Photonen und Quark-Felder können in der Inflations-Phase nicht existieren, da ihre Wellenlängen kleiner als die Planck-Länge wäre.