Quiz-Lösung: Lemaître-Universum

Max Camenzind

18. Februar 2021

1. Wie lautet die fundamentale Arbeit von Lemaître 1927 zur Expansion des Universums? Welches sind die wesentlichen Aussagen in dieser Arbeit?
   $\mapsto$ In Leuven begann er, seine Ideen zur Expansion des Universums aufzuschreiben. Erstmals erschien seine Arbeit 1927 in den *Annales de la Société scientifique de Bruxelles* unter dem Titel: *Un Univers homogène de masse constante et de rayon croissant rendant compte de la vitesse radiale des nebuleuses extra-galactiques.*
   Die wesentlichen Aussagen in dieser Arbeit sind:

   - Das Universum ist geschlossen, hat eine kosmologische Konstante (Dunkle Energie) und expandiert.
   - Die kosmologische Rotverschiebung z der Spiralnebel resultiert aus der Expansion des Universums. Es gilt $1 + z = R_0/R(t)$.
   - Er leitet aus der Expansion die Hubble-Beziehung her: $c\,z = H_0\,d$, $z \ll 1$.
   - Er bestimmt H_0 aus den Rotverschiebungen von Slipher und den Distanzen von Hubble für die damals gemessenen Spiralnebel.

2. Warum war Albert Einstein *not amused* über diese Arbeit?
   $\mapsto$ Bis 1931 träumte Einstein von einem statischen Universum. Diesbezüglich war er der alten Tradition verhaftet.

3. Wo findet man diese Arbeit als englische Übersetzung mit Kommentaren?
   $\mapsto$ Jean-Pierre Luminet hat die vollständige Arbeit 2013 nochmals übersetzt: Jean-Pierre Luminet (2013) Editorial note to *A Homogeneous Universe of Constant Mass and Increasing Radius accounting for the Radial Velocity of Extra–Galactic Nebulae* by Georges Lemaître (1927); arXiv:1305.6470

4. Wie lautet der metrische Ansatz für das Universum von Lemaître?
   $\mapsto$ Der metrische Ansatz für das geschlossenen Universum lautet

$$ds^2 = c^2\,dt^2 - R^2(t)\left(d\chi^2 + \sin^2\chi[d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\phi^2]\right)\,. \tag{1}$$

   Die drei Winkel (χ, θ, ϕ) beschreiben die Oberfläche einer dreidimensionalen Kugel S^3.

5. Wie groß ist das Volumen einer dreidimensionalen Kugeloberfläche S^3?
   $\mapsto$ Volumen $V = 2\pi^2 R^3$.

6. Was versteht man unter der Hubble-Funktion $H(a)$ oder $H(z)$ in einem expandierenden Universum mit Expansionsfaktor $a(t)$ oder $1 + z = 1/a(t)$? Wie lautet die Hubble-Funktion im ΛCDM-Modell des Universums?
   $\mapsto$ Es hat sich als günstig erwiesen, die Quellterme der Friedmann-Lemaître-Gleichung mit ihren Werten zur heutigen Zeit mit Hilfe der Dichte-Parameter auszudrücken

$$\boxed{H^2(z) = H_0^2 \left[\Omega_R(1+z)^4 + \Omega_M(1+z)^3 + \Omega_k(1+z)^2 + \Omega_\Lambda\right] .} \tag{2}$$

   $H(z)$ ist als **Hubble-Funktion** bekannt. Dabei ist H_0 der Hubble-Parameter zur heutigen Zeit $t = t_0$, $H_0 = H(t_0)$. Diese Beziehung zeigt, dass im frühen Universum, $z \gg 1000$, allein die Strahlungsdichte dominiert und dass Materie, Krümmung und Dunkle Energie keinen Einfluss mehr auf die zeitliche Entwicklung des Kosmos nehmen.
   $\mapsto$ ΛCDM: $\Omega_k = 0$.

7. Wie lautet die Huble-Funktion $H(a)$ für das Lemaître-Universum? Verwenden Sie die moderne Schreibweise mit Hubble-Konstante und Omega-Parametern! $a = R(t)/R_0$. $R(t)$ ist der Radius zur Zeit t, R_0 von heute.
   $\mapsto$ s. Box!

8. Untersuchen Sie die modifizierte Hubble-Funktion $P(a) = a^3 H^2(a)$ auf Nullstellen. Was bedeuten Nullstellen in dieser Funktion? Verwenden Sie Eigenschaften von Polynomen dritten Grades!
   $\mapsto$ Anstelle der Hubble-Funktion untersuchen wir das Polynom dritten Grades

$$P(a) \equiv a^3 H^2(a) = \Omega_\Lambda\, a^3 + \Omega_+\, a + \Omega_M\, . \tag{3}$$

   Für $\Omega_+ < 0$ und $\Omega_M > 0$ hat dieses Polynom entweder zwei Nullstellen, eine oder gar keine Nullstelle im Bereich $0 \leq a < \infty$. Dies kann man am besten durch eine grafische Analyse untersuchen. Treten zwei Nullstellen auf, läuft die Lösung in ein Maximum hinein und kollabiert wieder. Tritt nur eine Nullstelle auf, ist das Maximum gleichzeitig ein Wendepunkt und die Lösung expandiert weiter. Liegt keine Nullstelle vor, expandiert die Lösung für immer.

9. Führen Sie die dimensionslose Zeit $\tau = H_0\, t$ ein und leiten Sie aus der Hubble-Funktion die Entwicklungsgleichung für das Lemaître-Universums her in Form einer Differentialgleichung $da/d\tau = \pm\sqrt{....}$ Was bedeutet negative Ableitung?
   $\mapsto$ s. Box!
   Eine negatve Ableitung $da/dt < 0$ bedeutet Kollaps, $da/dt > 0$ Expansion.

10. $t_H = 1/H_0$ nennt man die Hubble-Zeit des Universums. Wie groß ist t_H für eine Hubble-Konstante von 67,4 km/s/Mpc (Planck-Daten)?

$\mapsto t_H = 1/H_0 = 14,5$ Milliarden Jahre. Das effektive Alter von LambdaCDM ist etwas kürzer infolge der Omega-Parameter.

11. Wie sehen die Lösungen $a(\tau)$ aus für Friedmann-Universen ohne Dunkle Energie, $\Omega_\Lambda = 0$?
$\mapsto$ s. 12. und Abb. 1 !

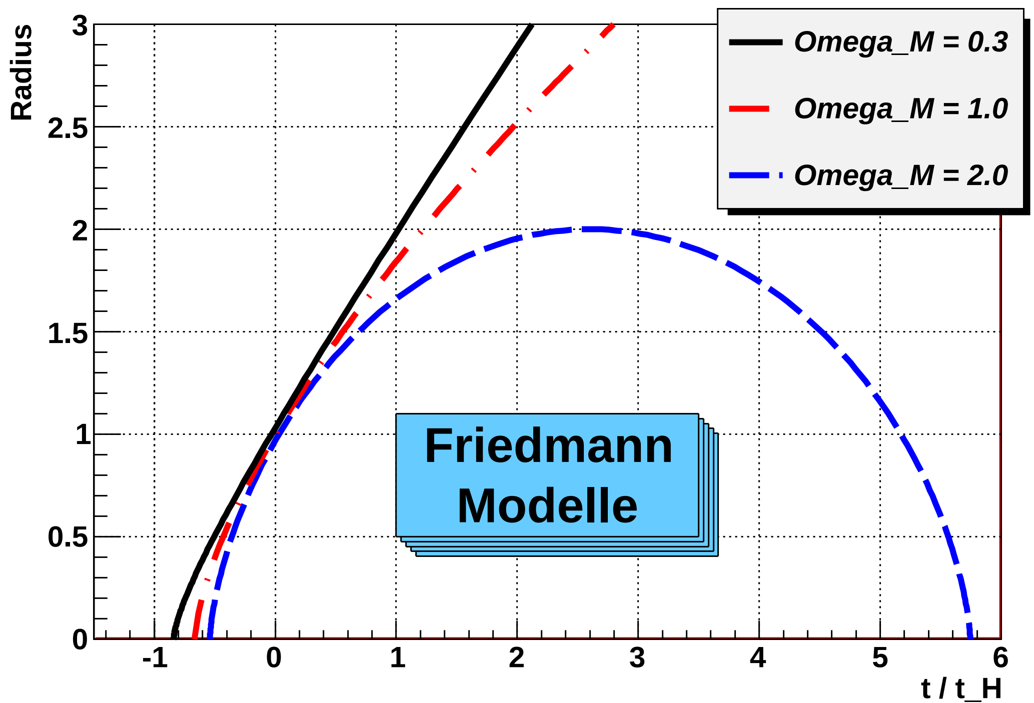

Abbildung 1: Modelle des Friedmann-Universums auf den heutigen Zustand $t = 0$ normiert als Funktion der Zeit in Hubble-Zeiten t_H. Unter allen Lösungen hat das geschlossene Universum (blau) das kürzeste Alter, das offene Universum (schwarz) das längste. Alle Modelle weisen eine Anfangssingularität auf, bei $R = 0$ $(z = \infty)$ werden Hubble-Funktion und Krümmung singulär. (Grafik: Camenzind)

12. Wie verändern sich die Lösungen $a(\tau)$, wenn die Dunkle Energie zunimmt? Wie verhalten sich die Lösungen für große Zeiten?
$\mapsto$ Ohne Dunkle Energie haben wir die oszillierenden Friedmann-Lösungen. Die zunehmende Dunkle Energie führt eine abstoßende Kraft ein, sodass die Lösungen für immer expandieren und nicht mehr kollabieren. Die Expansion auf langer Zeitskala geht exponentiell vor sich (s. Abb. 2).

13. Lemaître hat diese Lösungen bereits 1927 berechnet (er war ja Mathematiker und spezialisiert auf Differentialgleichungen). Welches Problem hatte er bei der Anwendung auf das damals bekannte Universum?
$\mapsto$ s. 14. !

14. Welchen Wert der Hubble-Konstanten hat Lemaître aus den Daten berechnet? Wie hat er das Problem der zu kurzen Lebensdauer des Universums gelöst?

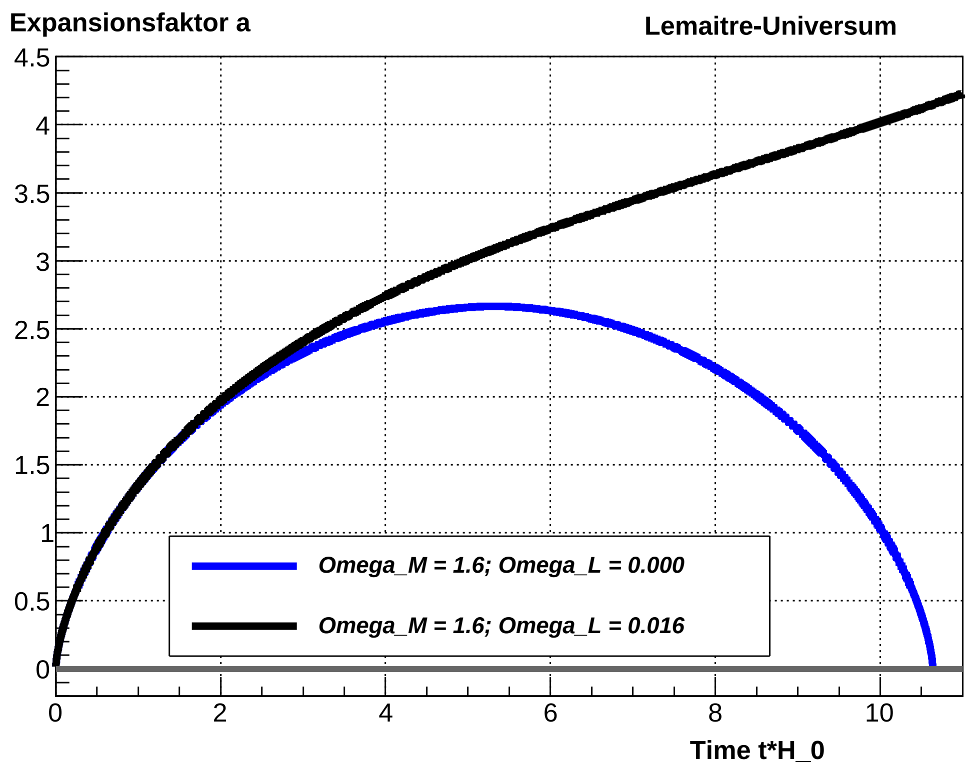

Abbildung 2: Das Universum von Lemaître mit hoher Materiedichte $\Omega_M = 1,6$. Bei geringer Dunkler Energie verläuft die Expansion wie in einem geschlossenen Friedmann-Universum (blaue Kurve). Bei zunehmender Dunkler Energie expandiert das Universum beschleunigt (schwarze Kurve). (Grafik: Camenzind 2021)

$\mapsto$ Lemaître leitete aus den Daten einen Wert von 600 km/s/Mpc ab, was Edwin Hubble zwei Jahre später auch erhalten hat. Dieser Wert ergibt ein zu kurzes Hubble-Alter für das Universum von nur knapp zwei Milliarden Jahren, was damals schon im Widerspruch zum radioaktiven Alter war. Dies war ein wichtiges Argument für die Urknall-Gegner. Lemaître postulierte daher einen kritischen Wert für die kosmologische Konstante, sodass die Expansion in eine Kriechlösung übergeht, bevor sie exponentiell weiter geht.

15. Alle Lösungen starten bei $t = 0$ mit $a(t = 0) = 0$. Wie hat Lemaître dies interpretiert?
$\mapsto$ Lemaître postulierte, dass das Universum aus einem Uratom entstanden ist. Das Atom war damals die kleinste Einheit, die in der Physik bekannt war und alle Welt spekulierte mit dem radioaktiven Zerfall der Atomkerne. Heute ist die kleinste Einheit das Planck-Bubble mit einem Radius von einigen Planck-Längen. Lemaître gilt deshalb als Erfinder des Urknall-Modells, das dann von Gamow 1948 weiter entwickelt wurde und sich 1965 mit der Entdeckung der Mikrowellenstrahlung von 3 K endgültig durchsetzte.

Box: Das Lemaître-Universum von 1927

Lemaître modellierte das Universum in seiner Arbeit von 1927 als Raum-Zeit mit 3-Sphären als Raumschnitte

$$ds^2 = c^2\,dt^2 - R^2(t)\left(d\chi^2 + \sin^2\chi(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\phi^2)\right). \tag{4}$$

$R(t)$ ist der zeitabhängige Radius einer 3-Sphäre, bestimmt durch die Oberfläche $V = 2\pi^2 R^3$. (χ, θ, ϕ) sind die drei Winkel, die jeden Punkt auf der 3-Sphäre eindeutig bestimmen. Ähnlich wie eine 2-Sphäre durch Kreise aufgebaut werden kann, kann man eine 3-Sphäre durch 2-Sphären zusammenbauen.

Der Radius R ist die einzige Variable in diesem Modell. Sie wird durch die Friedmann-Lemaître-Gleichung bestimmt

$$\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\,\rho_M(t) - \frac{c^2}{R^2(t)} + \frac{\Lambda c^2}{3}. \tag{5}$$

Die Massenerhaltung impliziert dabei die Skalierung der Dichte $\rho_M(t) = \rho_0(R_0/R(t))^3$ mit R_0 als heutigem Radius und ρ_0 als heutiger Massendichte. Mit Hilfe der **Hubble-Funktion** $H(t) = \dot{R}/R(t)$ und dem Expansionsfaktor $a(t) = R(t)/R_0$ kann die FL-Gleichung dimensionslos geschrieben werden

$$H^2(a) = H_0^2\left[\frac{\Omega_m}{a^3} + \frac{\Omega_+}{a^2} + \Omega_\Lambda\right]. \tag{6}$$

Hier verwenden wir die heute üblichen Omega-Parameter mit $\mathcal{M} = 4\pi\rho_0 R_H^3/3$ als der Masse innerhalb des Hubble-Radius

$$\Omega_m = \frac{8\pi G\rho_0}{3\,H_0^2} = \frac{2G\mathcal{M}}{c^2\,R_H} \tag{7}$$

$$\Omega_+ = -\frac{R_H^2}{R_0^2} \quad , \quad k = +1 \tag{8}$$

$$\Omega_\Lambda = \frac{\Lambda R_H^2}{3} \quad , \quad \Omega_m + \Omega_+ + \Omega_\Lambda = 1 \tag{9}$$

zusammen mit dem Hubble-Radius $R_H = c/H_0 = 4400$ Mpc für $H_0 = 67,4$ km/s/Mpc. Unter Verwendung der skalierten Zeit $\tau = H_0\,t$ folgt aus (6) die Differentialgleichung für den Expansionsfaktor $a = R(t)/R_0$

$$\frac{da}{d\tau} = \pm\sqrt{\frac{\Omega_m}{a} + \Omega_+ + \Omega_\Lambda\,a^2}\,. \tag{10}$$